

Titre de la thèse	Contrôlabilité en temps zéro des systèmes quantiques
Ecole Doctorale	ED548
Laboratoire	LIS
Discipline	Mathématiques
Directeur(s) de thèse Encadrant(s)	Francesca Chittaro (LIS) , Jean-Paul Gauthier (LIS)

Description du sujet de recherche

(3 pages maximum - contexte scientifique, objectifs, mots clé, références)

Contexte : Le but du contrôle quantique est de manipuler des systèmes quantiques pour réaliser des transferts de population efficaces entre les états du système. Cette tâche, qui est cruciale en physique atomique et moléculaire, avec des applications allant de la photochimie à l'information quantique, a attiré une attention croissante parmi les physiciens et chimistes quanticiens, mais aussi parmi les informaticiens et les mathématiciens de la théorie du contrôle.

Lorsqu'il est possible de négliger son interaction avec l'environnement, la dynamique d'un système quantique est décrite par l'équation de Schrödinger ; sous certaines hypothèses [1], l'équation de Schrödinger d'un système contrôlé par m champs extérieurs est de la forme

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (H_0 + \sum_{k=1}^m u_k H_k) \psi \quad (1)$$

En dimension finie, la contrôlabilité de l'équation (1) a été étudié de façon approfondie et elle est maintenant bien comprise (voir, par exemple, [2]-[3]-[4]). Néanmoins, comme aucun système peut rester isolé longtemps (il s'agit du phénomène de la *décohérence*, bien connu en physique quantique), l'équation (1) donne une description réaliste du système seulement pour des petites échelles de temps (la quantification de ces échelles dépend du système, et ne fait pas partie de notre analyse). Pour cette raisons, un problème majeure du contrôle quantique ([5]) est celui d'étudier le problème de la **contrôlabilité en temps zéro** du système (1), ce qui signifie quantifier le temps minimal

nécessaire pour atteindre n'importe quelle configuration, à partir d'une configuration donnée (pour des résultats en dimension finie et infinie, voir par exemple [6]-[7]-[8]-[9]).

Objectifs : En dimension finie, la théorie des groupes et des algèbres de Lie s'est déjà montrée un outils très performant pour étudier les propriétés de l'équation (1) (par exemple, voir [2]-[3]-[4]-[8]-[10])

Quant au problème de la contrôlabilité en temps zéro de (1), ceci revient au problème de mesurer la distance entre les orbites (sur la sphère unitaire complexe) du groupe tangente à l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs $H_k, k=1, \dots, m$ ([7]-[9]). Il est possible de démontrer qu'il s'agit d'un groupe simple, compact, connexe et simplement connexe (SCCSC).

Des premiers résultats (concernant un sous ensemble des groupes d'intérêt) ont montré un phénomène intéressant : il existe une constante d , qui ne dépend pas de la dimension du groupe, telle que la distance minimale entre les orbites est soit 0, soit d .

Le projet se décomposera en deux parties principales :

1. Dans un première temps, étudier les représentations des algèbres de Lie et déterminer quels groupes sont transitifs sur la sphère (ce qui implique que le système est contrôlable en temps zéro).
2. Dans un deuxième temps, se concentrer sur les groupes non transitifs et vérifier la conjecture sur l'existence d'une borne universelle d pour la distance entre les orbites.

L'extension du problème au cas de dimension infinie pourrait ouvrir des nouvelles perspectives de recherche.

Mots clés : *contrôle géométrique, contrôle quantique, groupes de Lie, contrôlabilité en temps zéro, équation de Schrödinger.*

Références :

- [1] C. Altafini and F. Ticozzi *Modeling and control of quantum systems: An introduction*, IEEE-TAC 57 (8), 1898-1917, 2012.
- [2] F. Albertini and D. D'Alessandro, *Notions of controllability for bilinear multilevel quantum systems*, IEEE-TAC, 48, pp. 1399–1403, 2003.
- [3] D. D'Alessandro, *Introduction to quantum control and dynamics.*, Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. Boca Raton, FL: Chapman, Hall/CRC., 2008
- [4] I. Kurniawan, G. Dirr and U. Helmke. *Controllability aspects of quantum dynamics: a unified approach for closed and open systems*, IEEE-TAC, Vol. 57, pp. 1984-1996, 2012.
- [5] S. J. Glaser et al., *Training Schrödinger's cat: quantum optimal control. Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe.* The European Physical Journal D, volume 69, 2015
- [6] K. Beauchard, J.-M. Coron, and H. Teismann, *Minimal time for the bilinear control of Schrödinger equations*, Systems Control Lett., 71, pp. 1–6, 2014.
- [7] N. Boussaïd, M. Caponigro, and T. Chambrion, *Small time reachable set of bilinear quantum systems*, IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control (CDC), 2012.

- [8] A. A. Agrachev, U. Boscain, J.-P. Gauthier and M. Sigalotti, *A note on time-zero controllability and density of orbits for quantum systems*, IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC), 2017.
- [9] I. Beschastnyi, U. Boscain and M. Sigalotti, *An obstruction to small-time controllability of the bilinear Schrödinger equation*, preprint hal-02385244v2?, 2019
- [10] U. Boscain, J.-P. Gauthier, F. Rossi, and M. Sigalotti, *Approximate controllability, exact controllability, and conical eigenvalue intersections for quantum mechanical systems*, Comm. Math. Phys., 333, pp. 1225–1239, 2015.

Compétences attendues et personnes à contacter

Le candidat recherché serait en possession d'un master (ou titre équivalent) en Mathématiques ou en Physique Théorique, et aurait les compétences suivantes :

- notions de la théorie de Lie
- notions de la théorie des groupes d'évolution
- éventuellement, des notions de mécanique quantique.