

Titre de la thèse	Codes géométriques algébriques pondérés
-------------------	---

Ecole Doctorale	ED548
Laboratoire	IMATH
Discipline	Mathématiques
Directeur(s) de Thèse & Encadrant(s)	Yves Aubry et Fabien Herbaut

Description du sujet de recherche

(3 pages maximum - contexte scientifique, objectifs, mots clé, références)

Contexte, originalité et pertinence par rapport à l'état de l'art :

Les codes géométriques de Goppa ont été introduits dans les années 1980 et sont fondés sur les espaces de Riemann-Roch sur les courbes algébriques projectives définies sur les corps finis et sont donc profondément ancrés dans le domaine de la géométrie algébrique. Ils ont permis une avancée considérable dans l'étude du domaine des codes, notamment grâce aux travaux de Tsfasman, Vladuts et Zink qui permirent de dépasser la borne de Gilbert-Varshamov et donc d'étendre celui-ci. Cette nouvelle construction de codes, appelés AG-codes (Algebraic Geometric codes), a depuis connu de très grandes avancées avec des études sur des familles de courbes diverses mais également sur des variétés algébriques de dimension supérieure, notamment sur les surfaces (voir [4] et [5]).

D'autre part, les codes de Reed-Muller généralisés aux espaces projectifs pondérés ont été étudiés à la fin des années 2010 (voir [3]) et permettent d'obtenir de meilleurs paramètres fondamentaux. Les degrés de liberté obtenus en introduisant des poids sur les coordonnées permettent, en effet, d'améliorer ceux-ci (voir encore [8]). La diversité des hypersurfaces sur lesquelles on choisit de construire nos codes donnent une grande richesse de familles, telles celles basées sur les variétés toriques (voir [7]).

Objectifs :

Il s'agira d'étendre l'étude des espaces de Riemann-Roch, et notamment la détermination de bases de ces espaces vectoriels, à des courbes singulières. Les codes de Goppa géométriques sur des courbes d'Edwards, qui sont des courbes singulières birationnellement équivalentes à des courbes elliptiques sous forme de Weierstrass, ont été récemment étudiés (voir [6]) dans ce sens.

D'autre part, considérer des courbes singulières permettrait de travailler avec des courbes, à genre géométrique fixé et à un cardinal de corps fini de base fixé, possédant plus de points rationnels. En effet, on pourra se baser sur l'étude du nombre de points rationnels sur un corps fini d'une courbe algébrique projective de genre géométrique fixé et de genre arithmétique fixé ainsi que sur celle des courbes singulières maximales menées dans [1] et [2]. In fine, cela pourrait produire des codes plus performants.

Il conviendra également de considérer des courbes algébriques plongées dans des espaces projectifs pondérés et de tenter d'estimer les paramètres des codes de Goppa géométriques construits sur celles-ci.

Méthodes :

Géométrie algébrique sur les corps finis, corps de fonctions sur les corps finis, théorie des codes.

Retombées attendues :

Publications dans des revues internationales de rang A de nouveaux théorèmes.

Mots clés : Codes géométriques algébriques, courbes singulières, espaces projectifs pondérés.

Références :

[1] Y. Aubry and A. Iezzi.

On the maximum number of rational points on singular curves over finite fields, Moscow Math. Journal, Vol. 15, Issue 4, October-December 2015, pp. 615--627 (2015).

[2] Y. Aubry and A. Iezzi.

Optimal and maximal singular curves, Proceedings of Arithmetic, Geometry and Coding Theory 2015, Contemporary Mathematics, Volume 686, pp. 31--43 (American Mathematical Society, 2017).

[3] Y. Aubry, W. Castryck, S. Ghorpade, G. Lachaud, M. O'Sullivan and S. Ram.

Hypersurfaces in weighted projective spaces over finite fields with applications to coding theory, Association for Women in Mathematics Series, Volume 9, Algebraic Geometry for Coding Theory and Cryptography, IPAM, Los Angeles -E. Howe, K. Lauter and J. Walker Editors (2018).

- [4] Y. Aubry, E. Berardini, F. Herbaut and M. Perret.
Algebraic geometry codes over abelian surfaces containing no absolutely irreducible curves of low genus, Finite Fields and Their Applications 70, Paper No. 101791 (2021).
- [5] Y. Aubry, E. Berardini, F. Herbaut and M. Perret.
Bounds on the minimum distance of algebraic geometry codes defined over some families of surfaces, Arithmetic, Geometry, Cryptography and Coding Theory, Contemporary Mathematics, Vol. 770, American Mathematical Society, Providence, RI, (2021), pp. 11--28.
- [6] G. Filippone.
Goppa codes over Edwards curves, arXiv:2301.09309v1 [math.AG] 23 Jan 2023.
- [7] J. Nardi.
Projective toric codes, Int. J. Number Theory, 18 (1), 179--204, (2022).
- [8] Y. Cakiroglu and M. Sahin.
Algebraic invariants of codes on weighted projective planes, arXiv:2301.05313v2 [cs.IT] 3 Nov 2023.

Encadrement et conditions matérielles pour le doctorant

Laboratoire IMATH adossé à deux ANR dans le domaine.

Compétences attendues et personnes à contacter

Compétences attendues :

Titulaire d'un Master de Mathématiques orienté en Algèbre.

Personne(s) à contacter :

Yves Aubry
Institut de Mathématiques de Toulon – IMATH
Université de Toulon
yves.aubry@univ-tln.fr