

Titre de la thèse	Étude variationnelle des plaques élastiques incompatibles
-------------------	---

Ecole Doctorale	ED548
Laboratoire	IMATH
Discipline	Mathématiques
Directeur(s) de Thèse & Encadrant(s)	Mohamad Reza Pakzad (PR, Université de Toulon)

## Description du sujet de recherche

---

*(3 pages maximum - contexte scientifique, objectifs, mots clé, références)*

Contexte, originalité et pertinence par rapport à l'état de l'art :

Récemment, il y a un intérêt croissant pour l'étude des corps élastiques dits "incompatibles", c.à.d. quand la loi du comportement du matériau est liée à une géométrie du domaine au repos incompatible avec la géométrie ambiante. Un tel corps élastique prend une configuration non triviale en l'absence de forces extérieures ou de conditions aux limites imposées, ce qui indique que des pré-contraintes ou des pré-déformations sont présentes dans le matériau. Ce phénomène se manifeste dans divers types d'expériences, p.ex. dans les tissus en croissance [3, 14], les couches de plastique déchirées [16], certains gels de polymères [6], ou il peut être du à des contraintes thermiques.

La théorie d'élasticité tridimensionnelle dans son ensemble est très non-linéaire et le modèle précontraint est géométriquement complexe. Étudier des modèles de complexité réduite, par exemple par linéarisation ou par réduction de dimension, peut grandement aider à comprendre de nombreux autres problèmes ouverts dans ce domaine. En outre, l'étude des corps élastiques à basse dimension, comme les poutres, les membranes, les plaques et les coques, a été un sous-domaine de la théorie d'élasticité depuis sa conception. L'approche variationnelle permet l'étude de  $\Gamma$ -limites des modèles de couches 3 dimensionnelles d'épaisseur tendant vers zéro. Dans le cas compatible (standard), il a été établi qu'on obtient une hiérarchie des modèles dépendants de l'ordre de grandeur des forces (voir p.ex. [7, 5]). Ce travail a été généralisé au cas incompatible (p.ex. voir [9, 10,

11)). Parmi les modèles limites, on peut nommer les modèles de plaques élastiques de type von Kármán [5, 3, 8] et les modèles dits "contraints par la condition de Monge-Ampère" [5, 10, 9].

Plusieurs questions restent ouvertes sur les modèles variationnels limites de plaques élastiques incompatibles. Le doctorant travaillera sur de tels modèles, de type von Kármán ou contraints par la condition de Monge-Ampère. La non-convexité inhérente du problème implique que les méthodes standards de calcul des variations ne sont plus suffisantes pour répondre aux questions diverses sur la multiplicité et la régularité des solutions et des techniques variées devront être adaptées au problème. Un des objectifs sera de mieux comprendre les comportements, comme le flambage, le froissement, les ondulations sur le bord, etc., des plaques élastiques incompatibles. Dans ce but, la formulation et la démonstration rigoureuse d'une description qualitative des solutions pour chaque modèle donné deviennent nécessaires.

*Objectifs :*

**(a) Étude des solutions anormales de l'équation de Monge-Ampère elliptique.** Lewicka et Pakzad [13] ont démontré la densité dans l'espace des fonctions continues des solutions très faibles de l'équation de Monge-Ampère  $\det \nabla^2 v = f$  où la fonction  $f$  est donnée sur un domaine bi-dimensionnel. Cao [1] a généralisé ce résultat pour le cas où  $f$  est positive et les valeurs aux limites de type Dirichlet sont fixées. Ces solutions modélisent le déplacement vertical d'une plaque qui préserve les distances entre les points matériels d'une couche mince jusqu'au deuxième ordre de perturbation et sont en relation étroite avec le phénomène des "rides" dans les couches minces incompatibles. Le doctorant considèrera le problème variationnel qui consiste à maximiser le volume contenu sous le graphe parmi les solutions possibles. Cela revient à un principe de sélection de meilleure solution – qui correspond à celle qui a un minimum de tension superficielle possible – parmi les solutions anormales. Les questions classiquement posées, comme l'existence, l'unicité, et la régularité des états maximisants, seront à étudier. On peut espérer que ces états puissent être identifiés par une qualification isopérimétrique, et que des estimations quantitatives de stabilité soient valides pour eux.

**(b) Étude d'échelles d'énergie des plaques von Kármán confinées.** En analysant les modifications délicates entraînées par la régularisation des plongements affines par morceaux des domaines bi-dimensionnels dans l'espace tri-dimensionnel, Conti et Maggi [2] ont obtenu des résultats sur l'échelle d'énergie élastique du confinement de feuilles du papier. Dans le but d'avancer sur les problèmes encore ouverts dans ce domaine, notamment la question de l'échelle optimale d'énergie de confinement, le doctorant essaiera de généraliser les résultats de [2] pour un cas modèle analytiquement similaire, c.à.d. pour une plaque de type von-Kármán confinée dans un voisinage tubulaire d'une fonction. L'analyse de compacité des suites bornées en énergie pour ce cas modèle peut aboutir à une description rigoureuse du phénomène de froissement de papier.

*Méthodes :*

Des outils variés d'analyse mathématique, commençant par des méthodes standards du calcul des variations et allant jusqu'aux méthodes de l'analyse géométrique, de l'analyse harmonique, et de la théorie géométrique de la mesure, seront utilisés. En parallèle, les méthodes numériques vont potentiellement être utilisées pour la mise en œuvre des résultats obtenus en vue des applications, ou bien pour obtenir des informations sur les solutions.

*Retombées attendues :*

1. Des avancées vers la résolution des problèmes ouverts en élasticité des couches minces. 2. Une meilleure compréhension théorique des phénomènes divers concernant l'élasticité des couches minces comme le froissement de papier ou les rides créées dans les matériaux incompatibles (p.ex. les plastiques déchirés, les

feuilles en croissance). 3. Présentation et analyse des nouveaux modèles de membrane ou de coque sous tension superficielle en vue d'applications diverses (p.ex. dans la biologie cellulaire).

*Mots clés* : Mécanique des solides, couches minces et tissus en croissance, élasticité incompatible, confinement et froissement de papier, calcul des variations, analyse géométrique, analyse non-linéaire.

*Références* :

- [1] W. Cao, Very weak solutions of the Dirichlet problem for the two dimensional Monge- Ampère equation, *Journal of Functional Analysis*, 284 (8), 15 April 2023, 109868.
- [2] S. Conti and F. Maggi, Confining thin sheets and folding paper, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 187, no. 1, 1–48, (2008).
- [3] J. Dervaux, P. Ciarletta, and M. Ben Amar, Morphogenesis of thin hyperelastic plates : a constitutive theory of biological growth in the Foppl-von Karman limit, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57 (3), (2009), 458–471.
- [4] E. Efrati, E. Sharon and R. Kupferman, Elastic theory of unconstrained non-Euclidean plates, *J. Mech. Phys. Solids*, 57 (2009), 762–775.
- [5] G. Friesecke, R. James and S. Müller, A hierarchy of plate models derived from nonlinear elasticity by gamma-convergence, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 180 (2006), no. 2, 183–236.
- [6] Y. Klein, E. Efrati and E. Sharon, Shaping of elastic sheets by prescription of non- Euclidean metrics, *Science*, 315 (2007), 1116–1120.
- [7] H. Le Dret and A. Raoult, The nonlinear membrane model as a variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity, *J. Math. Pures Appl.* 73 (1995), 549–578.
- [8] M. Lewicka, L. Mahadevan and M.R. Pakzad, The Föppl-von Kármán equations for plates with incompatible strains, *Proc. of the Royal Society A* 467 (2011), 402–426.
- [9] M. Lewicka, L. Mahadevan and M.R. Pakzad, The Monge-Ampère constraint : matching of isometries, density and regularity and elastic theories of shallow shells, *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, Vol 34, Issue 1, 45–67, (2017).
- [10] M. Lewicka, P. Ochoa and M.R. Pakzad, Variational models for prestrained plates with Monge-Ampère constraint, *Diff. Integral Equations*, 28, no 9-10, 861–898, (2015).
- [11] M. Lewicka and M.R. Pakzad, Scaling laws for non-Euclidean plates and the  $W^{2,2}$  isometric immersions of Riemannian metrics, *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, Vol. 17, no 4 (2011), 1158–1173.

[12] M. Lewicka and M.R. Pakzad, Prestrained elasticity : from shape formation to Monge-Ampère anomalies, Notices of the AMS, vol. 63, no. 1, (January 2016).

[13] M. Lewicka and M.R. Pakzad, Convex integration for the Monge-Ampère equation in two dimensions, Analysis and PDE, 10, No. 3, 695–727, (2017).

[14] H. Liang and L. Mahadevan, Growth, geometry and mechanics of the blooming lily, Proc. Nat. Acad. Sci., 108, 5516–21, (2011).

[15] Nath U, Crawford BCW, Carpenter R, Coen E (2003) Genetic control of surface curvature. Science 299, 1404-1407.

[16] Sharon E, Roman B, Swinney HL (2007) Geometrically driven wrinkling observed in free plastic sheets and leaves. Phys. Rev. E 75, 046211-046217.

## Encadrement et conditions matérielles pour le doctorant

Un bureau dans la salle des étudiants et un ordinateur sera mise à la disposition du candidat. Le directeur est présent au laboratoire en permanence. Le laboratoire a des moyens pour financer la participation du doctorant aux colloques.

## Compétences attendues et personnes à contacter

---

### Compétences attendues :

Diplôme de master 2 en mathématiques ou en mathématiques appliqués, ou équivalent.

La connaissance des outils de base d'analyse mathématiques (analyse multi-variables, théorie des distributions, analyse harmonique) et de géométrie; La connaissance des outils numériques et de langages de programmation sera un plus.

La créativité et la capacité d'initiative pour résoudre des problèmes mathématiques.

Le sens de la communication et le travail en équipe.

### Personne(s) à contacter :

Mohammad Reza Pakzad (Directeur de thèse)

[pakzad@univ-tln.fr](mailto:pakzad@univ-tln.fr)

Philippe Langevin (Le directeur IMATH)

[philippe.langevin@univ-tln.fr](mailto:philippe.langevin@univ-tln.fr)

## Description du projet de thèse

### Étude variationnelle des plaques élastiques incompatibles

**Directeur :** Mohammad Reza Pakzad (PR 26, Université de Toulon)

**Contexte, originalité et pertinence par rapport à l'état de l'art :** Récemment, il y a un intérêt croissant pour l'étude des corps élastiques dits "incompatibles", c.à.d. quand la loi du comportement du matériau est liée à une géométrie du domaine au repos incompatible avec la géométrie ambiante. Un tel corps élastique prend une configuration non triviale en l'absence de forces extérieures ou de conditions aux limites imposées, ce qui indique que des pré-contraintes ou des pré-déformations sont présentes dans le matériau. Ce phénomène se manifeste dans divers types d'expériences, p.ex. dans les tissus en croissance [3, 14], les couches de plastique déchirées [16], certains gels de polymères [6], ou il peut être du à des contraintes thermiques.

La théorie d'élasticité tridimensionnelle dans son ensemble est très non-linéaire et le modèle précontraint est géométriquement complexe. Étudier des modèles de complexité réduite, par exemple par linéarisation ou par réduction de dimension, peut grandement aider à comprendre de nombreux autres problèmes ouverts dans ce domaine. En outre, l'étude des corps élastiques à basse dimension, comme les poutres, les membranes, les plaques et les coques, a été un sous-domaine de la théorie d'élasticité depuis sa conception. L'approche variationnelle permet l'étude de  $\Gamma$ -limites des modèles de couches 3 dimensionnelles d'épaisseur tendant vers zéro. Dans le cas compatible (standard), il a été établi qu'on obtient une hiérarchie des modèles dépendants de l'ordre de grandeur des forces (voir p.ex. [7, 5]). Ce travail a été généralisé au cas incompatible (p.ex. voir [9, 10, 11]). Parmi les modèles limites, on peut nommer les modèles de plaques élastiques de type von Kármán [5, 3, 8] et les modèles dits "contraints par la condition de Monge-Ampère" [5, 10, 9].

Plusieurs questions restent ouvertes sur les modèles variationnels limites de plaques élastiques incompatibles. Le doctorant travaillera sur de tels modèles, de type von Kármán ou contraints par la condition de Monge-Ampère. La non-convexité inhérente du problème implique que les méthodes standards de calcul des variations ne sont plus suffisantes pour répondre aux questions diverses sur la multiplicité et la régularité des solutions et des techniques variées devront être adaptées au problème. Un des objectifs sera de mieux comprendre les comportements, comme le flambage, le froissement, les ondulations sur le bord, etc., des plaques élastiques incompatibles. Dans ce but, la formulation et la démonstration rigoureuse d'une description qualitative des solutions pour chaque modèle donné deviennent nécessaires.

## Objectifs :

### (a) Étude des solutions anomales de l'équation de Monge-Ampère elliptique.

Lewicka et Pakzad [13] ont démontré la densité dans l'espace des fonctions continues des solutions très faibles de l'équation de Monge-Ampère  $\det \nabla^2 v = f$  où la fonction  $f$  est donnée sur un domaine bi-dimensionnel. Cao [1] a généralisé ce résultat pour le cas où  $f$  est positive et les valeurs aux limites de type Dirichlet sont fixées. Ces solutions modélisent le déplacement vertical d'une plaque qui préserve les distances entre les points matériels d'une couche mince jusqu'au deuxième ordre de perturbation et sont en relation étroite avec le phénomène des "rides" dans les couches minces incompatibles. Le doctorant considèrera le problème variationnel qui consiste à maximiser le volume contenu sous le graphe parmi les solutions possibles. Cela revient à un principe de sélection de meilleure solution – qui correspond à celle qui a un minimum de tension superficielle possible – parmi les solutions anomales. Les questions classiquement posées, comme l'existence, l'unicité, et la régularité des états maximisants, seront à étudier. On peut espérer que ces états puissent être identifiés par une qualification isopérimétrique, et que des estimations quantitatives de stabilité soient valides pour eux.

### (b) Étude d'échelles d'énergie des plaques von Kármán confinées.

En analysant les modifications délicates entraînées par la régularisation des plongements affines par morceaux des domaines bi-dimensionnels dans l'espace tri-dimensionnel, Conti et Maggi [2] ont obtenu des résultats sur l'échelle d'énergie élastique du confinement de feuilles du papier. Dans le but d'avancer sur les problèmes encore ouverts dans ce domaine, notamment la question de l'échelle optimale d'énergie de confinement, le doctorant essaiera de généraliser les résultats de [2] pour un cas modèle analytiquement similaire, c.à.d. pour une plaque de type von-Kármán confinée dans un voisinage tubulaire d'une fonction. L'analyse de compacité des suites bornées en énergie pour ce cas modèle peut aboutir à une description rigoureuse du phénomène de froissement de papier.

**Méthodes :** Des outils variés d'analyse mathématique, commençant par des méthodes standards du calcul des variations et allant jusqu'aux méthodes de l'analyse géométrique, de l'analyse harmonique, et de la théorie géométrique de la mesure, seront utilisés. En parallèle, les méthodes numériques vont potentiellement être utilisées pour la mise en œuvre des résultats obtenus en vue des applications, ou bien pour obtenir des informations sur les solutions.

**Retombées attendues :** **1.** Des avancées vers la résolution des problèmes ouverts en élasticité des couches minces. **2.** Une meilleure compréhension théorique des phénomènes divers concernant l'élasticité des couches minces comme le froissement de papier ou les rides créées dans les matériaux incompatibles (p.ex. les plastiques déchirées, les feuilles en croissance). **3.** Présentation et analyse des nouveaux modèles de membrane ou de coque sous tension superficielle en vue d'applications diverses (p.ex. dans la biologie cellulaire).

**Mot clés :** Mécanique des solides, couches minces et tissus en croissance, élasticité incompatible, confinement et froissement de papier, calcul des variations, analyse géométrique, analyse non-linéaire.

**Références :**

- [1] W. Cao, *Very weak solutions of the Dirichlet problem for the two dimensional Monge-Ampère equation*, Journal of Functional Analysis, 284 (8), 15 April 2023, 109868.
- [2] S. Conti and F. Maggi, *Confining thin sheets and folding paper*, Arch. Ration. Mech. Anal. 187, no. 1, 1–48, (2008).
- [3] J. Dervaux, P. Ciarletta, and M. Ben Amar, *Morphogenesis of thin hyperelastic plates : a constitutive theory of biological growth in the Foppl-von Karman limit*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **57** (3), (2009), 458–471.
- [4] E. Efrati, E. Sharon and R. Kupferman, *Elastic theory of unconstrained non-Euclidean plates*, *J. Mech. Phys. Solids*, **57** (2009), 762–775.
- [5] G. Friesecke, R. James and S. Müller, *A hierarchy of plate models derived from nonlinear elasticity by gamma-convergence*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **180** (2006), no. 2, 183–236.
- [6] Y. Klein, E. Efrati and E. Sharon, *Shaping of elastic sheets by prescription of non-Euclidean metrics*, *Science*, **315** (2007), 1116–1120.
- [7] H. Le Dret and A. Raoult, *The nonlinear membrane model as a variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity*, *J. Math. Pures Appl.* **73** (1995), 549–578.
- [8] M. Lewicka, L. Mahadevan and M.R. Pakzad, *The Föppl-von Kármán equations for plates with incompatible strains*, *Proc. of the Royal Society A* **467** (2011), 402–426.
- [9] M. Lewicka, L. Mahadevan and M.R. Pakzad, *The Monge-Ampère constraint : matching of isometries, density and regularity and elastic theories of shallow shells*, *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, Vol 34, Issue 1, 45–67, (2017).
- [10] M. Lewicka, P. Ochoa and M.R. Pakzad, *Variational models for prestrained plates with Monge-Ampère constraint*, *Diff. Integral Equations*, 28, no 9-10, 861–898, (2015).
- [11] M. Lewicka and M.R. Pakzad, *Scaling laws for non-Euclidean plates and the  $W^{2,2}$  isometric immersions of Riemannian metrics*, *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, Vol. **17**, no 4 (2011), 1158–1173.
- [12] M. Lewicka and M.R. Pakzad, *Prestrained elasticity : from shape formation to Monge-Ampère anomalies*, *Notices of the AMS*, vol. **63**, no. 1, (January 2016).
- [13] M. Lewicka and M.R. Pakzad, *Convex integration for the Monge-Ampère equation in two dimensions*, *Analysis and PDE*, **10**, No. 3, 695–727, (2017).
- [14] H. Liang and L. Mahadevan, *Growth, geometry and mechanics of the blooming lily*, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **108**, 5516–21, (2011).
- [15] Nath U, Crawford BCW, Carpenter R, Coen E (2003) Genetic control of surface curvature. *Science* **299**, 1404-1407.
- [16] Sharon E, Roman B, Swinney HL (2007) Geometrically driven wrinkling observed in free plastic sheets and leaves. *Phys. Rev. E* **75**, 046211-046217.