

Titre de la thèse	Analyse mathématique et simulation numérique d'écoulements diphasiques à bas nombre de Mach : application à la sûreté des réacteurs nucléaires de nouvelle génération
Ecole Doctorale	ED548
Laboratoire	IMATH
Discipline	Mathématiques appliquées
Directeur(s) de Thèse & Encadrant(s)	Directeurs : Cédric GALUSINSKI (IMATH) et Bérénice GREC (MAP5, Université Paris Cité) Encadrant : Gloria FACCANONI (IMATH)

Description du sujet de recherche

Contexte, originalité et pertinence par rapport à l'état de l'art :

Ce projet de thèse s'inscrit au cœur des enjeux de transition énergétique et de sûreté nucléaire, une thématique structurante pour le territoire de la Région Sud. Le laboratoire IMATH de l'Université de Toulon entretient, depuis de très nombreuses années, un partenariat étroit avec le CEA, notamment dans le cadre de trois projets Needs¹ portés par Gloria FACCANONI et BÉRÉNICE GREC. Cette synergie académique et industrielle vise à doter les codes de calcul français de capacités de simulation toujours plus précises et performantes pour les cœurs et les échangeurs thermiques des réacteurs de quatrième génération (RNR-Na) et les réacteurs à eau pressurisée (REP).

La sûreté des réacteurs nucléaires de nouvelle génération repose en partie sur la capacité à simuler avec fiabilité des écoulements diphasiques complexes, en particulier dans des régimes où les effets acoustiques sont faibles mais où les phénomènes de changement de phase et de transfert thermique restent déterminants. Dans ces situations, les modèles compressibles classiques atteignent rapidement leurs limites, en raison d'un coût de calcul élevé et d'une robustesse parfois insuffisante.

Ce projet de thèse vise à développer et à analyser des modèles mathématiques adaptés aux régimes à bas nombre de Mach, afin de fournir des outils de simulation mieux adaptés aux besoins de la sûreté nucléaire. Il s'inscrit dans la continuité des travaux sur les modèles LMNC, qui constituent une approche spécifiquement conçue pour filtrer les ondes acoustiques tout en conservant les mécanismes physiques essentiels. L'enjeu est à

¹ Needs (Nucléaire : Énergie, Environnement, Déchets, Société) est un programme de recherche porté par le CNRS en partenariat avec l'ANDRA, l'ASNR, le BRGM, le CEA, EDF, Framatome et Orano visant à mobiliser une recherche académique sur les grandes questions scientifiques liées au nucléaire.

la fois scientifique et applicatif : il s'agit de construire des modèles plus fidèles dans leur domaine de validité, mais aussi plus efficaces pour le calcul scientifique.

L'originalité du projet repose sur trois points majeurs. Premièrement, il combine analyse mathématique rigoureuse et développement numérique, ce qui permet de traiter simultanément la cohérence des modèles et leur implémentation. Deuxièmement, il s'intéresse à deux formulations complémentaires, le modèle 3-LMNC à l'équilibre thermodynamique et le modèle 4-LMNC avec relaxation, afin de mieux comprendre leur lien asymptotique. Troisièmement, il ouvre la voie à des approches émergentes par apprentissage profond, notamment les PINNs, pour permettre d'approcher ces solutions.

Le positionnement du projet est particulièrement pertinent au regard de l'état de l'art. Si les modèles bas Mach sont désormais bien établis pour des fluides monophasiques, leur extension aux écoulements diphasiques avec transition de phase et thermodynamique réaliste soulève encore de nombreuses difficultés théoriques et numériques. Le projet répond donc à un verrou scientifique identifié, tout en s'appuyant sur une expertise déjà solide dans les laboratoires impliqués.

Objectifs :

L'objectif général de la thèse est de contribuer à la mise au point d'une base théorique et numérique robuste pour la simulation d'écoulements diphasiques à bas nombre de Mach, dans une perspective d'application à la sûreté nucléaire. Plus précisément, le travail visera à :

- établir des résultats d'existence et de cohérence pour les modèles 3-LMNC et 4-LMNC en dimension 2 et 3 ;
- justifier rigoureusement la limite de relaxation entre le modèle avec relaxation et le modèle à l'équilibre ;
- concevoir et analyser des schémas numériques robustes, en particulier des schémas préservant l'asymptotique ;
- traiter les difficultés liées à la diffusion thermique non linéaire et dégénérée ;
- explorer l'usage des PINNs pour la résolution des équations du modèle, notamment dans le cas des solutions discontinues.

Méthodes :

Le travail reposera sur une combinaison de méthodes analytiques et numériques.

Sur le plan théorique, l'étude mobilisera des estimations d'énergie, des arguments de compacité, l'analyse asymptotique et la théorie des limites singulières pour établir les propriétés fondamentales des modèles.

Sur le plan numérique, le projet développera et analysera des schémas de type volumes finis et des schémas AP, afin de garantir la robustesse des calculs lorsque le paramètre de relaxation tend vers zéro. Les résultats analytiques seront confrontés à des simulations sur cas tests représentatifs, ce qui permettra de valider les modèles et les schémas et d'évaluer leur comportement dans des situations proches des applications industrielles.

Enfin, un volet exploratoire portera sur les PINNs. L'intérêt n'est pas de remplacer les méthodes classiques, mais de tester leur capacité à approcher des solutions présentant des fronts de phase ou des singularités.

Cette démarche associe fondements théoriques solides, développement algorithmique et ouverture vers des approches innovantes. Elle permet également une validation croisée entre les résultats analytiques, les simulations numériques et, le cas échéant, les méthodes d'apprentissage.

Retombées attendues :

Les retombées attendues sont à la fois scientifiques, numériques et applicatives. Du point de vue fondamental, la thèse devrait clarifier la structure mathématique des modèles LMNC et apporter des résultats nouveaux sur la limite de relaxation et les régimes avec diffusion thermique. Du point de vue numérique, elle doit déboucher sur des schémas plus robustes et plus efficaces pour la simulation d'écoulements diphasiques à bas nombre de Mach. Sur le plan applicatif, les résultats pourront contribuer à l'amélioration des outils de calcul utilisés dans le domaine du nucléaire, en particulier pour les réacteurs de nouvelle génération. L'ouverture vers l'IA appliquée aux EDP accroît enfin le potentiel de valorisation scientifique du projet.

Ce projet renforce le positionnement de l'Université de Toulon comme un partenaire académique stratégique du CEA, en proposant des outils de simulation innovants capables de répondre aux défis majeurs de la souveraineté énergétique et de la sûreté nucléaire de demain.

Mots clés : Écoulements diphasiques, bas nombre de Mach, sûreté nucléaire, analyse mathématique, simulation numérique, transition de phase, schémas *asymptotic preserving*, PINNs, diffusion dégénérée

Références :

- S. Dellacherie. "On a low Mach nuclear core model". In : ESAIM : Proceedings 35 (2012), p. 79-106. doi : 10.1051/proc/201235006.
- M. Bernard, S. Dellacherie, G. Faccanoni, B. Grec et Y. Penel. "Study of a low Mach nuclear core model for two-phase flows with phase transition I : Stiffened gas law". In : ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis 48 (2014), p. 1639-1679. doi : 10.1051/m2an/2014035. Disponible sur : <https://hal.science/hal-00747616v2>.
- G. Faccanoni, B. Grec et Y. Penel. "A homogeneous relaxation low Mach number model". In : ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis 55 (2021), p. 1569-1598. doi : 10.1051/m2an/2021036. Disponible sur : <https://hal.science/hal-03140592v2>.
- G. Faccanoni, C. Galusinski et B. Grec. "A conservative two-phase flow model with a nonlinear degenerate diffusion". In : Mathematical Modelling of Natural Phenomena (2025). doi : 10.1051/mmnp/2025xxx. Disponible sur : <https://hal.science/hal-05021438v2>.

Encadrement et conditions matérielles pour le doctorant

Le doctorant bénéficiera d'un encadrement conjoint par l'IMATH (Université de Toulon) et le MAP5 (Université Paris Cité), dans un environnement scientifique reconnu, avec des interactions régulières avec le CEA, et une articulation forte autour des problématiques d'analyse des EDP, de simulation numérique et de modélisation des écoulements complexes.

Le projet bénéficiera des ressources nécessaires au calcul scientifique, des échanges réguliers entre les équipes d'encadrement et d'un environnement favorable à la participation à des séminaires et à des journées scientifiques. Cette structuration garantit au doctorant un cadre de travail propice à la réussite de la thèse et à la valorisation des résultats.

Compétences attendues et personnes à contacter

Compétences attendues :

Le projet s'adresse à un candidat ou une candidate disposant de solides bases en mathématiques appliquées, en particulier en analyse des équations aux dérivées partielles et en méthodes numériques. Un intérêt marqué pour la modélisation des fluides, la simulation scientifique et le calcul numérique sera fortement apprécié. Des compétences en programmation scientifique constituent un atout important.

Personne(s) à contacter :

- Cédric Galusinski – cedric.galusinski@univ-tln.fr
- Gloria Faccanoni – gloria.faccanoni@univ-tln.fr

Analyse mathématique et simulation numérique d'écoulements diphasiques à bas nombre de Mach: application à la sûreté des réacteurs nucléaires de nouvelle génération.

Proposition de thèse

Encadrants

- Gloria FACCANONI (IMATH)
gloria.faccanoni@univ-tln.fr
- Cédric GALUSINSKI (IMATH)
cedric.galusinski@univ-tln.fr
- Bérénice GREC (MAP5)
berenice.grec@u-paris.fr

Laboratoires

- [IMATH](#) – Université de Toulon
- [MAP5](#) – Université Paris Cité

Abstract. Ce projet de thèse porte sur l'étude des écoulements diphasiques à bas nombre de Mach, dans un contexte d'application à la sûreté des réacteurs nucléaires de nouvelle génération. L'objectif est de développer et d'analyser des modèles mathématiques adaptés aux régimes où les effets acoustiques sont négligeables, afin d'obtenir des descriptions plus robustes, plus précises et plus efficaces que les modèles compressibles classiques.

La thèse s'intéressera en particulier à deux formulations du modèle LMNC, correspondant à des situations d'équilibre thermodynamique et de relaxation vers l'équilibre. Le premier axe du travail consistera à étudier rigoureusement la cohérence mathématique de ces modèles, notamment l'existence de solutions, les propriétés asymptotiques et la limite de relaxation reliant le modèle avec relaxation au modèle à l'équilibre.

Le deuxième axe portera sur la conception et l'analyse de schémas numériques robustes, capables de préserver les propriétés asymptotiques du modèle et de traiter correctement les phénomènes de transition de phase, y compris en présence de diffusion thermique non linéaire et dégénérée.

Enfin, une ouverture plus exploratoire concernera l'utilisation de méthodes d'apprentissage profond, notamment les PINNs, pour approcher les solutions des équations du modèle et pour représenter certaines lois d'état thermodynamiques complexes, tout en respectant les contraintes de cohérence physique et thermodynamique.

Mots-clés : Écoulements diphasiques, Bas nombre de Mach, Sûreté nucléaire, PINNs (*Physics-Informed Neural Networks*), Analyse mathématique, Simulation numérique.

1 Introduction et Contexte Territorial

Ce projet de thèse s'inscrit au cœur des enjeux de transition énergétique et de sûreté nucléaire, une thématique structurante pour le territoire de la Région Sud. Le laboratoire IMATH de l'Université de Toulon entretient, depuis de très nombreuses années, un partenariat étroit avec le CEA, notamment dans le cadre de trois projets *Needs*¹. Cette synergie académique et industrielle vise à doter les codes de calcul français de capacités de simulation toujours plus précises et performantes pour les cœurs et les échangeurs thermiques des réacteurs de quatrième génération (RNR-Na) et les réacteurs à eau pressurisée (REP).

Les codes industriels actuels, basés sur des modèles compressibles de type Navier-Stokes, font face à des limitations majeures lors de certains scénarios comme la perte de débit (LOFA) : la gestion des ondes acoustiques y est extrêmement coûteuse en temps de calcul, en plus de nuire à la robustesse ou à la précision, selon le schéma numérique compressible utilisé, alors que leur impact physique devient négligeable. L'enjeu est donc de passer à des modèles dits LMNC (*Low Mach Nuclear Core*, [LMNC-1]). Ces modèles, qui constituent une approche complémentaire aux outils traditionnels, reposent sur une formulation filtrant les ondes acoustiques, spécifiquement conçue pour les régimes à bas nombre de Mach. Ils présentent des avantages mathématiques et numériques décisifs. D'une part, la gestion du changement de phase est facilitée par des lois d'état à variable unique, simplifiant l'analyse théorique et permettant d'obtenir des solutions explicites de référence. D'autre part, ils permettent des gains significatifs en termes de performance numérique. Ils sont déjà utilisés comme solutions de référence ou de préconditionnement dans les codes compressibles du CEA.

2 État de l'art

Si le régime bas Mach est bien documenté pour des fluides monophasiques, d'abord pour des fluides barotropes [Mach-1], puis pour des fluides décrits par les équations de Navier-Stokes-Fourier [Mach-2], l'introduction de transitions de phase (liquide-vapeur) rend plus complexe l'analyse des modèles dans le contexte d'une thermodynamique réaliste.

Ces modèles se déclinent principalement en deux versions selon le traitement du déséquilibre entre les phases. En particulier nous nous intéresserons à deux modèles, à savoir le modèle 3-LMNC [LMNC-2], à l'équilibre thermodynamique, et le modèle 4-LMNC [LMNC-3], avec relaxation, où un paramètre ε gouverne le retour à l'équilibre. Ces modèles sont dérivés des modèles compressibles à trois (HEM) ou quatre (HRM) équations dans un régime asymptotique à bas nombre de Mach.

L'analyse mathématique de ces modèles demeure en grande partie ouverte, à l'exception de certains travaux en domaine fermé [Mach-3]. En particulier, l'étude rigoureuse de la limite de relaxation du modèle 4-LMNC vers le modèle 3-LMNC constitue un enjeu théorique majeur et constitue une étape indispensable pour garantir la cohérence des outils de simulation utilisés dans les études de sûreté.

Sur le plan numérique, des schémas ont été développés en dimension un pour les deux modèles, notamment des schémas préservant l'asymptotique lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ [LMNC-3]. L'introduction de la diffusion thermique met en évidence l'apparition de solutions singulières, ce qui impose une formulation conservative du modèle [LMNC-4].

3 Axes de recherche envisagés

Le programme de travail se déclinera autour de trois verrous scientifiques majeurs, visant à transformer les modèles théoriques en outils de simulation robustes.

1. *Needs* (Nucléaire : Énergie, Environnement, Déchets, Société) est un programme de recherche porté par le CNRS en partenariat avec l'ANDRA, l'ASNR, le BRGM, le CEA, EDF, Framatome et Orano visant à mobiliser une recherche académique sur les grandes questions scientifiques liées au nucléaire.

Étude de la transition de phase et limite de relaxation. Le premier défi concerne la cohérence mathématique entre le modèle 4-LMNC (avec relaxation) et le modèle 3-LMNC (à l'équilibre). Il s'agit tout d'abord d'établir des théorèmes d'existence globale pour les modèles 3-LMNC et 4-LMNC en dimension deux ou trois, en l'absence de diffusion thermique, dans des espaces fonctionnels adaptés. Ces résultats permettront d'envisager la preuve rigoureuse de la limite de relaxation du modèle 4-LMNC vers le modèle 3-LMNC, en fournissant des estimations uniformes de régularité. Ces travaux seront étendus à l'analyse de schémas numériques robustes vis-à-vis du passage à la limite (schémas AP), au moins en dimension un, avec validation théorique et numérique.

Singularités et diffusion thermique. La prise en compte de la diffusion thermique non-linéaire et dégénérée, indispensable pour la modélisation des réacteurs de type RNR-Na, fait apparaître des solutions singulières pouvant même mener à l'évanescence de la zone de mélange. L'objectif est de fournir des schémas numériques robustes en deux ou trois dimensions capables de gérer ces singularités, en s'appuyant sur les solutions analytiques et numériques obtenues dans [LMNC-4].

Intelligence Artificielle. Enfin, un volet plus exploratoire sera exploré à travers deux axes complémentaires utilisant l'apprentissage profond. Le premier axe concerne l'utilisation des réseaux de neurones informés par la physique (PINNs) pour la résolution des EDP du modèle LMNC. Un verrou scientifique majeur réside dans la capacité de ces architectures à approcher avec précision les solutions présentant des discontinuités ou des fronts de transition de phase. Les solutions analytiques et numériques obtenues dans [LMNC-4] constitueront ici des bases de validation indispensables pour évaluer la robustesse des PINNs face à ces singularités. Le second axe, plus exploratoire, porte sur l'utilisation de réseaux de neurones pour l'approximation des lois d'état thermodynamiques complexes. L'enjeu est de construire des modèles d'apprentissage capables de garantir le respect des principes fondamentaux (consistance thermodynamique, convexité de l'entropie) tout en offrant une efficacité de calcul supérieure aux tabulations classiques, répondant ainsi aux exigences strictes de fiabilité de la sûreté nucléaire.

4 Impact et rayonnement

En conclusion, ces travaux permettront une description fine des transferts thermiques au sein du circuit primaire. Ce projet renforce le positionnement de l'Université de Toulon comme un partenaire académique stratégique du CEA, en proposant des outils de simulation innovants capables de répondre aux défis majeurs de la souveraineté énergétique et de la sûreté nucléaire de demain.

5 Bibliographie

5.1 Modélisation LMNC

- [LMNC-1] S. DELLACHERIE. "On a low Mach nuclear core model". In : *ESAIM : Proceedings* 35 (2012), p. 79-106. DOI : [10.1051/proc/201235006](https://doi.org/10.1051/proc/201235006).
- [LMNC-2] M. BERNARD, S. DELLACHERIE, G. FACCANONI, B. GREC et Y. PENEL. "Study of a low Mach nuclear core model for two-phase flows with phase transition I : Stiffened gas law". In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 48 (2014), p. 1639-1679. DOI : [10.1051/m2an/2014035](https://doi.org/10.1051/m2an/2014035). Disponible sur : <https://hal.science/hal-00747616v2>.
- [LMNC-3] G. FACCANONI, B. GREC et Y. PENEL. "A homogeneous relaxation low Mach number model". In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 55 (2021), p. 1569-1598. DOI : [10.1051/m2an/2021036](https://doi.org/10.1051/m2an/2021036). Disponible sur : <https://hal.science/hal-03140592v2>.

- [LMNC-4] G. FACCANONI, C. GALUSINSKI et B. GREC. “A conservative two-phase flow model with a nonlinear degenerate diffusion”. In : *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* (2025). DOI : [10.1051/mmnp/2025xxx](https://doi.org/10.1051/mmnp/2025xxx). Disponible sur : <https://hal.science/hal-05021438v2>.

5.2 Analyse mathématique de modèles à bas nombre de Mach

- [Mach-1] B. DESJARDINS et E. GRENIER. “Low Mach number limit of viscous compressible flows in the whole space”. In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 455 (1999), p. 2271-2279. DOI : [10.1098/rspa.1999.0427](https://doi.org/10.1098/rspa.1999.0427).
- [Mach-2] E. FEIREISL et A. NOVOTNÝ. “The low Mach number limit for the full Navier–Stokes–Fourier system”. In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 186.1 (2007), p. 77-107. DOI : [10.1007/s00205-007-0066-4](https://doi.org/10.1007/s00205-007-0066-4).
- [Mach-3] Y. PENEL. “Étude théorique et numérique de la déformation d’une interface séparant deux fluides non-miscibles à bas nombre de Mach”. Thèse de doct. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2010-12. Disponible sur : <https://theses.hal.science/tel-00547865>.